Στο προηγούμενο ...

9ο μάθημα 4/5/20

$$f(x,y)=0 \qquad V(f)$$

απλά

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$

ή $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

Δηλ. μπορώ να φέρω την εφαπτόμ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = 0$$

(Εξίσ. εφαπτ. L)

Σημείο καμπής αν είναι απλό, $I_p(f,L) \geq 3$

ιδιόμορφα ή πολλαπλά

Όταν δεν είναι απλό, άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \neq 0$ ή $\frac{\partial f}{\partial y^2}(a,b) \neq 0$

ή $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0$

Εξίσ. εφαπτομ.:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot(y-a)^2 = 0$$

Τριπλό σημείο: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

Μία τουλ. 3η μερική παράγωγος είναι $\neq 0$

Εξίσ. εφαπτ.:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)\cdot(x-a)^3 + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)(x-a)^2(y-b)$$

$$+ 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)(y-b)^3 = 0$$

Προβολικοί χώροι

Εχω 3 αξιωμα → χάνω μοναδικότητα για την εφαπτ.

Εφαπτόμενη σε απλό σημείο (α, β, γ):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha,\beta,\gamma)\cdot X + \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha,\beta,\gamma)\cdot Y + \frac{\partial F}{\partial z}(\alpha,\beta,\gamma)\cdot Z = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω F ένα ομογενές πολ/μο βαθμού $d \geq 1$. Η Hessian (Εσσιανή) του F είναι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ενα σημείο $P=(x_0, y_0, z_0)$ μιας καμπύλης $V(F)$ είναι σημείο καμπής αν το σημείο P είναι απλό σημείο κ. $H_F(x_0, y_0, z_0) = 0$

ΠΑΡΑΔ.: Βρείτε τα σημεία καμπής της καμπύλης $V(F)$ όπου $F = x^3 + y^3 - 3xyz$

ΛΥΣΗ:

$F=0 \to$ ιδιόμορφα

$H_F = 0 \to$ καμπής

1ο Βήμα: Ιδιόμορφα (Λύνω το σύστημα των 3 παραγώγων)

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3xz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = -3xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } y=0 \\ x^2 - yz = 0 \\ y^2 - xz = 0 \end{cases}$$

α) περίπτωση: $\begin{cases} x=0 \\ x^2 - yz = 0 \Rightarrow yz = 0 \\ y^2 - xz = 0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$

άρα $(0,0,1)$ λύση (ιδιόμορφο σημείο)

β) περίπτωση: $\begin{cases} y=0 \\ x^2 - yz = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x=0 \\ y^2 - xz = 0 \Rightarrow xz = 0 \end{cases}$

άρα $(0,0,1)$

Αν το "στοίχαμε" κι άλλο, δηλ.:

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2 = 0 \Rightarrow x=0 \\ xz = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (0,0,1)$, $\cancel{(0,0,0)}$

ιδιόμορφο, μη αποδεκτή

2ο Βήμα: Υπολογίζω H_F

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz \to \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -3z = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3xz \to \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = -3x$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y$

$\frac{\partial F}{\partial z} = -3xy \to \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z \partial x} = -3y$

$$H_F = \begin{vmatrix} 6x & -3z & -3y \\ -3z & 6y & -3x \\ -3y & -3x & 0 \end{vmatrix} = -3y\cdot(9xz + 18y^2) + 3x\cdot[-3x(3x^2-3yz) - 9yz] + 0$$

$$= \cancel{27xyz} - \cancel{27xyz} - 54(x^3 + y^3 + xyz) \underset{=0}{=}$$

Άρα $H_F = -54(x^3+y^3+xyz) = 0$

Άρα το σύστημα $\begin{cases} F=0 \\ H_F=0 \end{cases}$ είναι:

$$\begin{cases} x^3+y^3-3xyz=0 \\ x^3+y^3+xyz=0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 4xyz=0$$

Άρα έχω: $\begin{cases} x^3+y^3=0 \\ xyz=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } y=0 \text{ ή } z=0 \end{cases}$

Περιπτώσεις:

i) $x=0$

$x^3+y^3=0 \Rightarrow y^3=0 \Rightarrow y=0$

Άρα $(0,0,1)$ ιδιόμορφο σημείο

ii) $y=0$

$x^3+y^3=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$

Άρα $(0,0,1)$

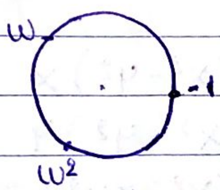
iii) $z=0$

$x^3+y^3=0$

$(\ldots, -1, 0)$ Βάζω οποιαδήποτε συντ/νη που επαληθεύει την εξίσωση

Βάζω τυχαία $y=-1$ (με βολεύει) κ' στη συνέχεια έχω να λύσω: $x^3-1=0$

άρα έχω: $(1,-1,0)$
$(\omega,-1,0)$
$(\omega^2,-1,0)$



$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

ΑΡΑ: Λύσεις του συστήματος $\begin{cases} F=0 \\ H_F=0 \end{cases}$ είναι:

$(0,0,1)$, $(1,-1,0)$, $(\omega,-1,0)$, $(\omega^2,-1,0)$ όπου $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

ιδιόμορφο

σημεία καμπής

Άρα η $V(F)$ έχει 3 σημεία καμπής
Και τα 3 είναι στην ίδια ευθεία $Z=0$
Δεν ανήκουν στην $y=-1$ γιατί $y+1=0$
δεν είναι ομογενής, δεν είναι δηλ.
ευθεία στον προβολικό χώρο ■

Δες ΑΣΚΗΣΕΙΣ
φυλλ. 4 (Εφαπτ.)

Το παρακάτω παράδ.
δεν είναι ιδιόμορφη κ
έχει 9 σημεία καμπής
(δεν είναι τυχαίο)

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε όλα τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης $V((x^2-y^2)^2+(2x^2-6y^2)z^2)$
ΛΥΣΗ:
$F=(x^2-y^2)^2+(2x^2-6y^2)z^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2(x^2-y^2)\cdot 2x + 4xz^2 = 4(x^2-y^2)x + 4xz^2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2-y^2)\cdot(-2y) - 12yz^2 = -4(x^2-y^2)y - 12yz^2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = (2x^2-6y^2)\cdot 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)x + xz^2 = 0 \\ (x^2-y^2)y + 3yz^2 = 0 \\ (x^2-3y^2)z = 0 \Rightarrow (x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)z = 0 \end{cases}$$

Διακρίνω περιπτώσεις:
i) $z=0 \to \begin{cases} (x^2-y^2)x = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y)x = 0 \\ (x^2-y^2)y = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y)y = 0 \end{cases}$

για $x=y$ έχουμε κοινή λύση, άρα
$\boxed{(1,1,0)}$ ιδιόμορφο σημείο

· αν $x+y=0$ πάλι μηδενίζει κ' τις δύο

$\Leftrightarrow y=-x$

άρα $\boxed{(1,-1,0)}$ ιδιόμορφο σημείο

· αν τώρα $x=0 \rightarrow \cancel{(0,0,0)}$ ΑΠΟΡΡ.

ii) $x-\sqrt{3}y=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}y$:

$$\begin{cases}(x^2-y^2)x+xz^2=0\\(x^2-y^2)y+3yz^2=0\end{cases}$$

$$\Big\downarrow x=\sqrt{3}y$$

$$\begin{cases}2y^2\sqrt{3}y+\sqrt{3}yz^2=0\\2y^3+3yz^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^3+yz^2=0\\2y^3+3yz^2=0\end{cases}$$

$$\Big\downarrow (-)$$

$$-2yz^2=0$$

$$\Rightarrow y=0 \text{ ή } z=0$$

· αν $y=0$: $\begin{cases}x=\sqrt{3}y\\y=0\\-2y^3+yz^2=0\end{cases} \rightarrow (0,0,1)$

· αν $z=0$: $\begin{cases}x=\sqrt{3}y\\z=0\\-2y^3+yz^2=0 \Rightarrow y^3=0 \Rightarrow y=0\end{cases}$

$$\rightarrow \cancel{(0,0,0)}$$

iii) $x=-\sqrt{3}y$:

$$\begin{cases}(x^2-y^2)x+xz^2=0\\(x^2-y^2)y+3yz^2=0\end{cases} \xrightarrow{x=-\sqrt{3}y} \begin{cases}2y^2(-\sqrt{3}y)-\sqrt{3}yz^2=0\\2y^2\cdot y+3yz^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2y^3+yz^2=0\\2y^3+3yz^2=0\end{cases} \xrightarrow{(-)} 2yz^2=0 \Rightarrow y=0 \text{ ή } z=0$$

αν $y=0 \rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3}y \Rightarrow x=0 \\ y=0 \\ 2y^3+4z^2=0 \Rightarrow 4z^2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0,1)$

αν $z=0 \rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3}y \\ z=0 \\ 2y^3+4z^2=0 \Rightarrow 2y^3=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \cancel{(0,0,0)}$

Συνεπώς: έχω 3 ιδιόμορφα σημεία:
$(1,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(0,0,1)$

Εφαπτόμενη στο $(0,0,1)$:
Ο τύπος μου είναι μόνο για δύο μεταβλητές οπότε απομοφευονοποιώ, $z=1$. Άρα:

$$f=(x^2-y^2)^2+2x^2-6y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x^2-y^2)\cdot 2x+4x=4x^2y+4y^2x+4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(x^2-y^2)\cdot(-2y)-12y=-4x^2y+4y^3-12y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8xy+4y^2+4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=4x^2+8yx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4x^2+12y^2-12$$

Εξίσ. εφαπτ.: $4x^2+2\cdot 0xy-12y^2=0$

$\Rightarrow 4x^2-12y^2=0$

$\Rightarrow x^2-3y^2=0 \quad (0,0) \quad z=1$

$\Rightarrow (x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)=0$

$\Rightarrow x-\sqrt{3}y=0 \quad , \quad x+\sqrt{3}y=0$

οι εφαπτ. μου

Ομογενοποιώ $\rightarrow$ $x - \sqrt{3}y = 0$

$x + \sqrt{3}y = 0$

Αν το σημείο του ήταν το (1,7) δε θα μπορούσα να το κάνω αυτό

Βρείτε τις εφαπτόμενες στο ιδιόμορφο σ. (1,1,0)

Εδώ δεν μπορώ το $z = 1$.
Τι κάνω? Απομογενοποιώ...
Πώς? $\rightarrow$ Είτε ως προς x
είτε ως προς y
...

y-z επίπεδο $\quad (1,0)$ (y, z)

Απομογενοποιώ $x = 1$:

$$f(y,z) = (1-y^2)^2 + (2-6y^2)z^2 = 1 + y^4 - 2y^2 + 2z^2 - 6y^2z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y - 12yz^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4z - 12y^2 z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4 - 12z^2 \rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,0)} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4 - 12y^2 \rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(1,0)} = 4 - 12 = -8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -24yz \rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right|_{(1,0)} = 0$$

Άρα με βάση τον τύπο: $8\cdot(y-1)^2 + \cancel{2\cdot 0\cdot(y-1)}z - 8z^2 = 0$

$\Rightarrow (y-1)^2 - z^2 = 0 \Rightarrow (y-1-z)(y-1+z) = 0$

(2 εφαπτόμενες)

$\Rightarrow y - 1 - z = 0, \quad y - 1 + z = 0$

Ομογενοποιώ ως προς x :

$y - x - z = 0$

$y - x + z = 0$ εφαπτόμενες στο $(1,1,0)$

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : Έστω $V(f)$ καμπύλη στο επίπεδο κ' $V(F)$ η αντίστοιχη της στο προβολικό. Ονομάζουμε ασύμπτωτη της $V(f)$ οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου που η αντίστοιχή της στο προβολικό επίπεδο είναι εφαπτόμενη στην $V(F)$ σε σημείο της $V(f)$ στο άπειρο.

$V(f)$

F

$z = 0$

Βρίσκω τα σημεία στο άπειρο

Σε κάθε ένα από αυτά βρίσκω τις εφαπτόμενες

<u>ασύμπτωτες</u>

$z = 1$

<u>Π.χ.</u> $V(x^2 - y^2 - 3x + y - 2)$

Ομογενοποιώ

$$x^2 - y^2 - 3xz + yz - 2z^2 = 0$$

Ψάχνω σημεία στο άπειρο, $z = 0$, άρα:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 - 3xz + yz - 2z^2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Rightarrow (1,1,0), (1,-1,0)$

σημεία στο ∞

Εφαπτόμενη στο $(1,1,0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,0)\cdot x + \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)\,y + \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)\,z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3z \rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,1,0)} = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y + z \rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,0,0)} = -2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -3x + y - 4z \rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,1,0)} = -2$$

άρα: $2x - 2y - 2z = 0$

$\downarrow$

Ασύμπτωτη: $2x - 2y - 2 = 0$

Εγώ θέλω όμως την ασύμπτωτη

$$F = x^2 - y^2 - 3xz + yz - 2z^2 = 0$$

$$2x + 2y - 4z = 0$$

$\downarrow z=1$

$$2x + 2y - 4 = 0$$